Fabricando vetores em $\mathbb{R}^4$

Armando G. M. Neves
Departamento de Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais
aneves@mat.ufmg.br

30 de setembro de 2020

José Breves estudou comigo durante o Ensino Fundamental. Éramos realmente próximos, bons amigos então. Mas a vida nos levou a lados diferentes. Ainda assim, eu encontrava o Zé Breves de vez em quando. Fomos alunos da mesma universidade, mas fazíamos cursos diferentes, tínhamos interesses diferentes. Sei que o Zé hoje tem um cargo político importante.

O episódio que lhes quero relatar aconteceu antes de o Zé entrar para o governo. Um amigo comum do tempo da escola me contou que o Breves tinha se tornado um empresário e parecia que estava bastante próspero. Eu, como sabem, me tornei só um professor universitário na área da Matemática.

Um dia recebi um e-mail da empresa VecR4W. Para minha surpresa, vi que a mensagem estava assinada pelo amigo José Breves, diretor presidente da empresa. Breves me chamava para uma consultoria.

No dia seguinte, ele me recebeu em seu escritório refrigerado. Após um ótimo café espresso, bem curtinho como aprecio, ele passou a me explicar seu negócio.

Breves era fabricante de vetores em $\mathbb{R}^4$. Perguntei-lhe se era capaz de produzir qualquer vetor em $\mathbb{R}^4$. Ele me disse que trabalhava em um nicho mais específico, um subespaço que na empresa eles chamavam de W.

– Eu não sabia que vetores de $\mathbb{R}^4$ tinham grande valor de mercado – eu disse para quebrar o gelo.

– Nem todos – ele me respondeu. – Veja o vetor $\overline{0}$. Esse não tem valor de mercado. Posso pegar um só dos meus funcionários e produzir o $\overline{0}$ sozinho e sem trabalho algum. Por exemplo, posso chamar o v_1. Ele produz o $\overline{0}$ como

$$\overline{0} = 0v_1 \ .$$

– É mesmo. O $\overline{0}$ parece barato. Além do mais, suponho que todas as demais empresas do ramo consigam produzí-lo da mesma maneira, usando qualquer funcionário.

Mas eu queria saber mais sobre o negócio do Breves para poder oferecer-lhe meus préstimos. Ele continuou sua exposição.

– Em geral os clientes nos procuram com encomendas que sabem que nós podemos produzir. Mas quase sempre precisamos de mais de um dos nossos funcionários para gerar a encomenda.

– Como assim?

– Veja bem. Dou-lhe toda a ficha do v_1. Ele é

$$v_1 = (1, 2, -1, 0) \ .$$

Sozinho, ele não consegue produzir $(1, 4, 1, 6)$. Esse vetor está no nosso catálogo, mas para nenhum valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ temos

$$\alpha v_1 = (1, 4, 1, 6) \ .$$

Mas se eu envolver v_2, v_3, v_4 e v_5, consigo produzir $(1, 4, 1, 6)$ como

$$-v_1 - v_2 + 2v_3 + 2v_4 - v_5 = (1, 4, 1, 6) \ . \qquad (1)$$

– Calma aí. Quem são v_2, v_3, v_4 e v_5?

– São outros funcionários da empresa, esqueci de apresentá-los.

$$\begin{aligned} v_2 &= (2, 1, 1, -1) \\ v_3 &= (0, 3, -3, 1) \\ v_4 &= (1, 1, 1, 1) \\ v_5 &= (-2, 1, -5, -1) \ . \end{aligned}$$

Junto com o v_1, estes são todos os nossos funcionários da linha de produção, nosso conjunto gerador. São muito bem pagos e produzem todos os vetores do nosso catálogo, o subespaço W.

Eu estava começando a entender o processo de fabricação da VecR4W. Arrisquei:

– Quer dizer que o processo de produção de vocês é baseado em combinações lineares? Caramba! Vocês têm capacidade de produzir infinitos vetores!

– Estou vendo que escolhi bem você como consultor. Parece entender do ramo. Nossa tecnologia de produção é exatamente a de usar as combinações lineares. Eu achava que isto fosse um segredo das empresas do ramo de produção de vetores...

Agora eu estava me sentindo prestigiado. Quis ir diretamente ao ponto e perguntei-lhe à queima roupa:

– Acho que adivinhei seu problema. A VecR4W quer expandir seu mercado e produzir mais vetores, ir além do subespaço W.

Senti que o Breves ficou meio sem graça. Eu tinha errado o alvo. Ele disse:

– Não. Estamos satisfeitos com o nosso nicho de negócios. Nossa empresa já tem um boa posição no mercado. Se fabricássemos outros vetores, teríamos que mudar o próprio nome da VecR4W e invadir o nicho de outras empresas. E teríamos também que contratar novos funcionários para a produção. Nosso problema é...

Ele gaguejou, engasgou e não desembuchava. A sua última frase me fez intuir aquilo que ele hesitava em revelar.

– Acho que entendo – eu disse. – Seu problema tem a ver com a – fiz uma pausa tentando soar diplomático – produtividade?

Breves percebeu que eu tinha entendido o seu problema e confirmou:

– Tenho a sensação de que eu poderia dispensar algum dos meus funcionários sem comprometer a capacidade de geração da VecR4W. Temos um bom desempenho, mas precisamos ser mais eficientes para continuar concorrendo no mercado. Alguns dos produtos do nosso catálogo também são produzidos por outras empresas...

– Acho que sei resolver seu problema. Você disse que o $\overline{0}$ não tem valor de mercado, pois pode ser produzido de forma trivial. Você acha que seus funcionários poderiam trabalhar de forma não-trivial e produzir o $\overline{0}$?

Ele deve ter achado minha pergunta uma esquisitice matemática. Mas ligou para alguém do setor de pesquisa e desenvolvimento. Após alguns segundos me exibiu a resposta em uma folha de papel. Eram duas matrizes equivalentes por linhas. Na primeira, as coordenadas de seus funcionários apareciam como colunas, seguidas por uma coluna de zeros. A segunda matriz era escalonada reduzida. Reproduzo abaixo o que ele recebeu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

– Minha funcionária da pesquisa procurou todas as soluções para o problema de gerar o $\overline{0}$ usando meus funcionários da produção. Para isto, ela resolveu a equação vetorial

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_5 v_5 = \overline{0} \; .$$

As incógnitas são os α_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Ela disse que a equação vetorial é equivalente a um sistema homogêneo de equações lineares. Aqui na VecR4W a gente costuma usar o método de Gauss-Jordan para resolver esses sistemas. Segundo ela, há soluções não-triviais para produzir o $\overline{0}$. As soluções são

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = (-2r - 2s, r + s, r, 2s, s) \; ,$$

onde r e s são números reais quaisquer.

Após alguns instantes de reflexão, ele continuou:

– Se eu tomar, por exemplo $r = 1$ e $s = 0$, obtenho que

$$-2v_1 + v_2 + v_3 = \overline{0} \; .$$

Curiosamente, v_1, v_2 e v_3 podem trabalhar de forma não-trivial e produzir o $\overline{0}$.

Eu ia me arrepender disto mais tarde, mas fiquei entusiasmado e soltei:

– Isto mesmo! O conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ é linearmente dependente!

Apesar de não ter cursado GAAL, ou de ter esquecido esses conhecimentos, Breves não era nem um pouco ingênuo. Seus olhos brilharam de uma maneira que eu ainda não tinha vislumbrado e disse:

– Para produzir $(1, 4, 1, 6)$ eu estava usando (1). Mas acabei de descobrir que $v_3 = 2v_1 - v_2$. Se eu substituir isto em (1), obtenho

$$3v_1 - 3v_2 + 2v_4 - v_5 = (1, 4, 1, 6) \; . \tag{2}$$

Não só o $(1, 4, 1, 6)$! Posso produzir qualquer vetor em W substituindo v_3 pela combinação linear $2v_1 - v_2$.

Nesse momento temi pelo emprego de v_3. Mas ele também poderia ter trocado v_1 por uma combinação linear de v_2 e v_3, ou v_2 por uma combinação linear de v_1 e v_3. Torci para que ele parasse por ali sua sanha pela produtividade. Mas era tarde demais...

– Como $\alpha_3 = r$, se eu fizer $r = 0$ e $s \neq 0$, obtenho ainda outras soluções não-triviais para gerar o $\overline{0}$ sem usar v_3: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_4 v_4 + \alpha_5 v_5 = \overline{0}$ desde que

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5) = (-2s, s, 2s, s) \; .$$

Tomando, por exemplo, $s = 1$, tenho que

$$-2v_1 + v_2 + 2v_4 + v_5 = \overline{0} \ .$$

Posso então substituir v_5 por $2v_1 - v_2 - 2v_4$ em (2). Para obter o mesmo $(1, 4, 1, 6)$ posso usar só v_1, v_2 e v_4:

$$v_1 - 2v_2 + 4v_4 = (1, 4, 1, 6) \ .$$

E qualquer outro vetor de W pode ser produzido como combinação linear só de v_1, v_2 e v_4.

Eu queria dizer ao Breves que havia outras escolhas de elementos do seu conjunto gerador que também poderiam produzir todo W. Mas ele já nem me ouvia, entusiasmado com a possibilidade de enxugar ainda mais seu quadro de funcionários.

– Se eu fizer $r = 0$ e $s = 0$ obtenho todas as combinações lineares só de v_1, v_2 e v_4 que dão resultado $\overline{0}$. Acho que vai dar para dispensar mais alguém.

Sua voz tinha assumido um tom meio diabólico, mas voltou ao normal quando observou que se fizesse $r = s = 0$, então teria somente que a combinação linear trivial $0v_1 + 0v_2 + 0v_4$ daria o resultado $\overline{0}$.

Triunfalmente, eu disse:

– Veja, não dá para tirar mais ninguém! O conjunto $\{v_1, v_2, v_4\}$ é linearmente independente. A menos que você queira também diminuir a produção...

– De fato, $\dim W = 3$. Não dá para enxugar mais o quadro. Se eu tirar mais algum vetor, gerarei algum subespaço de W com dimensão menor. Não quero perder uma fatia do mercado. Vou permanecer com a base $\{v_1, v_2, v_4\}$ para W. Eu até poderia substituir minha base por outra, mas seriam sempre três funcionários. Infelizmente, o sindicato deles não me permitiria pagar salários menores.

José Breves me pagou alguns tostões pela consultoria. Soube alguns dias mais tarde que v_3 e v_5 tinham sido demitidos e que as ações da VecR4W tinham subido na bolsa. Lamentei por v_3 e v_5 e esperei que eles conseguissem emprego em alguma outra empresa de geração de vetores de $\mathbb{R}^4$.

Hoje em dia presto consultorias somente a empresas que operam subespaços vetoriais de dimensão infinita.